

INTEGRALES GÉNÉRALISÉES



Classification Thèmes de MegaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

On considère la fonction réelle de la variable réelle $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

- 1) Déterminer ^{l'ensemble} le domaine de définition D de F .
- 2) Montrer que F est strictement décroissante sur D . (On pourra, par exemple, revenir à la définition d'une fonction strictement décroissante.)
- 3) A l'aide d'une majoration simple, déterminer la limite de F en $+\infty$.
- 4) On se propose d'étudier le comportement de F au voisinage de 0^+ .
- a) Soit $A > 0$.

Montrer que : $\forall u \geq 0, -u \leq e^{-u} - 1 \leq 0$.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Retrouver ce résultat en appliquant un théorème sur les intégrales dépendant d'un paramètre.

b) Montrer que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = +\infty$.

c) En déduire la limite de F en 0^+ .

(Exercice proposé par Allison Krieger le 6/10/07 par mail - mégamathématicien 2)

1) • Si $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-xt} = 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T > 0 \quad t > T \Rightarrow e^{-xt} < \frac{\varepsilon}{t}$$

$$\text{et } \int_T^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \varepsilon \int_T^A \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$$

Comme $\int_T^A \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ converge quand $A \rightarrow +\infty$ (puisque $\int_T^A \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \leq \int_T^A \frac{1}{t^2} dt$

et $\int_T^A \frac{1}{t^2} dt$ converge quand $A \rightarrow +\infty$), on peut affirmer que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_T^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \text{ existe,}$$

donc aussi $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$ car $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $[0, T]$,

donc intégrable sur cet intervalle, et :

$$\int_0^A = \int_0^T + \int_T^A$$

• Si $x \leq 0$, on a $e^{-xt} \geq 1$ pour tout $t \geq 0$, donc

$$\int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad (*)$$

mais les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ sont de même nature (puisque $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t}$), donc divergent.

On en déduit $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = +\infty$, et (*) montre que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$ diverge.

Conclusion: L'ensemble de définition de F est \mathbb{R}_+^* .

2) On a $F(x) - F(x') = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-x't}}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq 0$ dès que $x < x'$, puisque :

$$x < x' \Rightarrow -xt > -x't \Rightarrow e^{-xt} > e^{-x't}.$$

3) On remarque que $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$ pour tout t , donc, pour $A \in \mathbb{R}_+$ fixé,

$$\int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \int_0^A e^{-xt} dt = \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x}}_{\rightarrow 0 \text{ (} x \rightarrow +\infty)}$$

On coupe donc en deux! Si $\varepsilon > 0$ est donné, l'intégrale $F(x)$ étant convergente, il existe $A > 0$ tel que

$$\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Alors :

$$F(x) = \int_0^A \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-2A}}{n} \right) = 0$, il existe $X \in \mathbb{R}$ tq ;

$$n \geq X \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{e^{-2A}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Compte tenu de (2) :

$$\forall \varepsilon \exists X \quad n \geq X \Rightarrow 0 < F(n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 0}$

4.a) Je vous laisse terminer Allison.

Soit la fonction: $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$$

a) En utilisant la règle d'Abel, montrer que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$ est uniformément convergente sur \mathbb{R}_+ . En déduire la continuité de F sur \mathbb{R}_+ .

b) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

c) En déduire $F(x)$, puis $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

d) En remplaçant t par $2t$ dans $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ puis en utilisant une intégration par parties, trouver la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$. Recommencer pour obtenir $\int_0^\infty \frac{\sin^4 t}{t^3} dt$.

Posez $f(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin t}{t}$

a) Rappel: Lemme d'Abel. Soient $h(x, t)$ et $g(x, t)$ 2 appl. de $I \times [a, b]$ dans \mathbb{R} .

L'intégrale $\int_a^b h g dt$ converge uniformément sur I si:

$$1) \exists M \quad \forall \lambda < b \quad \sup_{x \in I} \left| \int_a^\lambda h(x, t) dt \right| \leq M$$

2) L'application $x \mapsto g(x, t)$ converge uniformément vers 0 quand $t \rightarrow b$

3) $\forall x \quad t \mapsto g(x, t)$ décroît.

(Ravis IV.2.3)

Soi $g(t) = \sin t$ et $h(x, t) = \frac{e^{-tx}}{t}$ montrent que $\int_1^\infty f dt$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ . Comme $\int_0^1 f dt$ converge aussi unif. en 0 (car $|f(x, t)| \leq \frac{|\sin t|}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\sin t|}{t} = 1$ donc $\int_0^1 \frac{|\sin t|}{t} < \infty$), on déduit que $\int_0^\infty f dt$ converge uniformément pour $x \in \mathbb{R}_+$.

$f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ étant continue, le th. de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre assure la continuité de F sur \mathbb{R}_+ .

b) f admet la dérivée partielle continue $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-tx} \sin t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x} dt$ est uniformément convergente pour

$x \in [A, +\infty[$ car si $x \geq A$, $|-e^{-tx} \sin t| \leq e^{-At}$ et $\int_0^\infty e^{-At} = \frac{1}{A} < \infty$, de sorte

que l'on puisse appliquer le Th. général de dérivation sous le signe \int :

$$F \text{ sera dérivable sur }]A, +\infty[\text{ et } F'(n) = \int_0^{\infty} -e^{-tn} \sin t \, dt$$

C'est vrai pour tout $A > 0$, donc F sera dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

* Une double intégration par parties donne :

$$F'(n) = \int_0^{\infty} -e^{-tn} \sin t \, dt = -1 + n \int_0^{\infty} e^{-tn} \cos t \, dt = -1 - n^2 F'(n)$$

d'où

$$F'(n) = \frac{-1}{1+n^2} \quad \forall n \in \mathbb{R}_+^*$$

c) Ainsi $F(n) = -\text{Arctg} n + k$ pour $n \in \mathbb{R}_+^*$.

F étant continue sur \mathbb{R}_+ , ce sera vrai pour $n \in \mathbb{R}_+$.

$$|F(n)| \leq \int_0^{\infty} e^{-tn} \, dt = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 0 \quad \text{donc } k = \frac{\pi}{2}.$$

Cel :

$$\forall n \in \mathbb{R}_+ \quad F(n) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg} n$$

$$\text{et } F(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sinh t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$d) \text{ Faisons } t = 2u : \quad \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin u \cos u}{u} \, du = \left[\frac{\sin^2 u}{u} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin^2 u \left(-\frac{1}{u^2} \right) \, du$$

$$\text{d'où } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du = \frac{\pi}{2}$$

$$* \text{Recommandons : } \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 2t}{4t^2} 2 \, dt = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin^2 t \cos^2 t}{t^2} \, dt = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin^2 t (1 - \sin^2 t)}{t^2} \, dt$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} \, dt \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^2} \, dt = \frac{\pi}{4}$$

a) Mq l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$ est convergente (où $n \in \mathbb{N}$)

b) Grâce à une intégration par parties, mq :

$$I_n = n \int_0^{\pi/2} \cotan x \cdot \sin 2nx \, dx$$

c) Mq si f est intégrable sur $[a, b]$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$
(On pourra utiliser des fonctions en escaliers qui approximent f ...)

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = n^2$ donc $x \mapsto \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}$ se prolonge par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et I_n convergera.

$$\begin{aligned} b) \quad I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \left[-\cotan x \cdot \sin^2 nx \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cotan x \cdot 2 \sin nx \cos nx \cdot n dx \\ &= n \int_0^{\pi/2} \cotan x \cdot \sin 2nx \cdot dx \end{aligned}$$

(est justifiable en prenant la borne ϵ au lieu de 0, puis en faisant tendre ϵ vers 0)

c) On trouve cette preuve dans Ramis III 6.4.1.3° ex p 215.

• Si $f = cte$, $\int_a^b cte \sin \lambda x \, dx = cte \frac{\cos \lambda a - \cos \lambda b}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow +\infty)$

• Si f est en escalier, ce sera encore vrai par linéarité.

• Si f est intégrable, on l'approxime par une fct en escalier φ pour la semi-norme $\|\cdot\|_1$, ie :

$$\forall \epsilon \quad \exists \varphi \text{ en escalier} \quad \int_a^b |f - \varphi| \leq \epsilon \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| &\leq \underbrace{\left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \sin \lambda x \, dx \right|}_{\leq \int_a^b |f - \varphi| \leq \epsilon} + \underbrace{\left| \int_a^b \varphi(x) \sin \lambda x \, dx \right|}_{\leq \epsilon \text{ si } \lambda \text{ grand}} \\ &\leq \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

Q.F.D

NB: Montrons (*).

1^{er} sol: Avec cette déf. de la Riemann-intégrabilité: " f est \mathbb{R} -intégrable sur $[a, b]$ si $\forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{P}_\epsilon, \varphi_\epsilon$ en escalier $|f - \varphi_\epsilon| \leq \varphi_\epsilon$ et $\int_a^b \varphi_\epsilon < \epsilon$." Alors $\int_a^b |f - \varphi_\epsilon| \leq \epsilon$.

2nd sol: Avec cette déf. équivalente à la préc. pour des fcts de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: " f est \mathbb{R} -intégrable sur $[a, b]$ si elle est bornée et si la borne sup. des sommes de Darboux inférieures est égale à la borne inf. des sommes de Darboux supérieures. La valeur commune de ces bornes s'appelle $\int_a^b f$ ".

Notons $s(f, (a_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x) (a_{i+1} - a_i)$ la somme de Darboux inférieure relative à f et à la subdivision (a_i) . On a:

$$\forall \epsilon > 0 \exists (a_i) \quad \int_a^b f - \epsilon < s(f, (a_i)) \leq \int_a^b f$$

$$\text{ie } 0 \leq \int_a^b f - s(f, (a_i)) < \epsilon$$

et il suffit de voir que $s(f, (a_i)) = \int_a^b \varphi$ pour le fct en escalier φ valant $\inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x)$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Alors:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \varphi \quad 0 \leq \int_a^b (f - \varphi)(x) dx < \epsilon$$

Comme $\varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, on a bien $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \epsilon$.
CQFD

d) Comme $\cotan x \sim \frac{1}{x}$, on a l'idée de faire intervenir $\cotan x - \frac{1}{x}$ pour obtenir une fct intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{I_n}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cotan x - \frac{1}{x} \right) \sin 2nx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{x} dx$$

$$* \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$* \lim_{n \rightarrow 0} \left(\cotan x - \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ car } \cotan x - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \sim \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\text{et } \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x(1+o(x)) - (x+o(x^2))}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

$x \mapsto \cotan x - \frac{1}{x}$ se prolonge donc par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, sera donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et c) s'appliquera: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cotan x - \frac{1}{x} \right) \sin 2nx = 0$
CQFD

NB: la règle de l'Hôpital permet d'avoir aussi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1/\cos^2 x}{\tan x + x/\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1 + \cos 2x} = 0$$

Démontrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente (Ind. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$)

* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ montre que l'on peut prolonger la fct $\frac{\sin x}{x}$ par continuité en 0. Le seul problème est donc en $+\infty$. Une intégration par parties permet de conclure :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx &= \left[\frac{1}{x} \cdot (-\cos x) \right]_1^A - \int_1^A -\frac{1}{x^2} (-\cos x) dx \\ &= -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

puisque $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ et $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ est absolument convergente

$$* \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

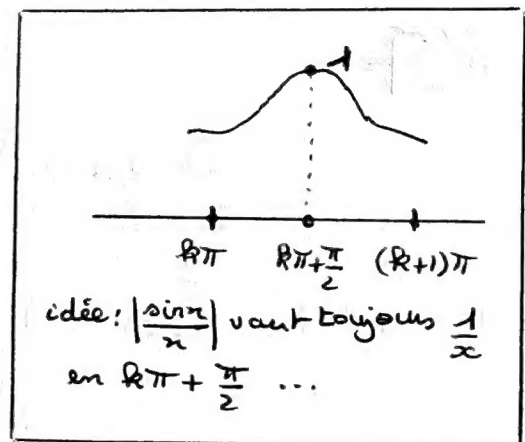
$$\begin{aligned} \text{et } \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx \\ &\geq \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{(-1)^k \sin x}{(k+1)\pi} dx}_{\text{car } \sin x \geq 0 \text{ sur } [k\pi, (k+1)\pi]} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi} \left[(-1)^{k+1} \cos x \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi} \left((-1)^{k+1} - (-1)^k \right)$$

$$= \frac{2}{(k+1)\pi}$$

De sorte que $\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$ où $\sum \frac{2}{(k+1)\pi}$ diverge.
L'intégrale proposée sera donc pas absolument convergente.



On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}} dx$

1) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .

2) En déduire une expression de I_n en fonction de I_0 .

I_n est bien convergente.

$$1) I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}} dx = \int_0^1 x^{n-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$= \left[x^{n-\frac{3}{4}} \frac{(1-x)^{\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(n-\frac{3}{4}\right) x^{n-\frac{3}{4}-1} \frac{(1-x)^{\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} dx$$

$= 0 \text{ si } n \geq 1$

$$= \left(n-\frac{3}{4}\right) \frac{4}{3} \int_0^1 x^{(n-1)-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{4}} (1-x) dx$$

$$= \left(\frac{4}{3}n-1\right) \int_0^1 \left(x^{(n-1)-\frac{3}{4}} - x^{n-\frac{3}{4}}\right) (1-x)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$I_n = \left(\frac{4}{3}n-1\right) (I_{n-1} - I_n)$$

$$\boxed{I_n = \frac{4n-3}{4n} I_{n-1}} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

$$2) I_n = \frac{4n-3}{4n} \cdot \frac{4n-7}{4(n-1)} \cdots \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} I_0$$

$$\boxed{I_n = \frac{(4n-3) \cdot (4n-7) \cdots 5 \cdot 1}{4^n \cdot n!} I_0}$$

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$a) I_a = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$$

$$b) I_b = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3} dx$$

$$c) I_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}} \text{ pour } n > 1$$

$$d) I_d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(\tan x) dx$$

$$e) I_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

$$f) I_f = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\operatorname{Arccos}(x+1)}$$

$$g) I_g = \int_{-1}^1 \frac{2^{\operatorname{Arccos} x}}{1-x} dx$$

$$h) I_h = \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

(a) I_a converge car :

au voisinage de 1, $\frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ et $\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ converge.

au voisinage de 5, $\frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$ et $\int_x^5 \frac{dx}{2\sqrt{5-x}}$ converge.

NB : Un chgt de variable permet de le vérifier. Ainsi, si $x-1=t$ et $1 < x < 5$,

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \int_0^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{(4-t)t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{(4-t)t}} \sim \frac{1}{2\sqrt{t}}, \int_0^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ convergeant.}$$

Calcul :

$$I_a = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}} = \left[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-3}{2}\right) \right]_1^5 = \operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin}(-1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$(b) I_b = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3} dx$$

$\frac{\sin x}{x^3} \geq 0$ pour tout $x \in]0, \pi]$. Comme $\frac{\sin x}{x^3} \sim \frac{1}{x^2}$ et $\int_0^\pi \frac{1}{x^2} dx$

diverge. Il en sera donc de même de I_b .

$$\textcircled{c} \quad I_c = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}}$$

Le problème est en $\frac{\pi}{2}$. Posons $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$I_c = \int_{\pi/2}^0 \frac{-dt}{(\sin t)^{1/n}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(\sin t)^{1/n}}$$

$\frac{1}{(\sin t)^{1/n}}$ reste positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{(\sin t)^{1/n}} \sim \frac{1}{t^{1/n}}$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^{1/n}} dt$ converge dès que $n > 1$. Donc I_c converge.

$$\textcircled{d} \quad I_d = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(\tan x) dx$$

Notons que l'intégrant $f(x) \doteq \cos x \ln(\tan x)$ garde un signe constant au voisinage de 0 ou de $\frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet d'utiliser des équivalents.

$$\underline{\text{En } 0} : \left. \begin{array}{l} \tan x \sim x \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln \tan x \sim \ln x \quad \begin{array}{l} \text{(Ramis III 5.1.3 Pro III p153)} \\ \text{(voir aussi [T] Dével. limites)} \\ \text{(voir lemme ci-dessous (*))} \end{array}$$

Donc $f(x) \sim \ln x$.

L'intégrale convergera en 0 car $\int_0^A \ln x dx = [x \ln x - x]_0^A$ converge.

$$\underline{\text{En } \frac{\pi}{2}} : \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \ln(\tan x) = - \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \ln(\cos x) = 0$$

La fct $f(x)$ sera donc prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale convergera en $\frac{\pi}{2}$.

$$\underline{\text{NB}} : I_d = -\ln 2 \quad \text{AV}$$

(*) Lemme : Si f et g sont strict. positives au vois. de x_0 ,
 $\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g = l \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln f \sim \ln g$
 preuve : $\ln g \neq 0$ pour x suffisamment voisin de x_0 (car $\lim_{x \rightarrow x_0} g = l \neq 1$), donc $\ln f \sim \ln g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f}{\ln g} = 1$
 Or a $\frac{\ln f}{\ln g} - 1 = \frac{\ln f - \ln g}{\ln g} = \frac{\ln \frac{f}{g}}{\ln g}$.
 Cette exp. tend bien vers 0 car $f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1$
 et $\ln g$ tend soit vers $\ln l$, soit vers $\pm \infty$ CQFD

22/3/93

② $I_e = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ pose problème en 0.

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(\sin x) \sim \ln x$$

Comme $\int_0^1 \ln x dx$ converge, I_e sera convergente.

Calcul: $I_e = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos y) dy$ où $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Donc $2I_e = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx - \frac{\pi}{2} \ln 2$ (*)

Mais $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin X) dX$ où $X = 2x$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin X) dX}_{I_e} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin X) dX}_{= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) du = I_e} \\ &= I_e \end{aligned}$$

où $u = X - \frac{\pi}{2}$

(*) entraîne alors

$$\boxed{I_e = -\frac{\pi}{2} \ln 2}$$

⑧ $I_f = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\operatorname{Arccos}(x+1)}$

$\operatorname{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est décroissante.

Si $x \in [-1, 0]$, alors $\operatorname{Arccos}(x+1) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, d'où un pb en 0.

Poseons $x = \cos t - 1$.

$$I_f = \int_{\pi/2}^0 \frac{-\sin t dt}{\operatorname{Arccos}(\cos t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{qui converge puisque } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\textcircled{g} \quad I_g = \int_{-1}^1 \frac{2^{\text{Arcsin} x}}{1-x} dx$$

Arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue. Le seul pb sera en 1.

$$\frac{2^{\text{Arcsin} x}}{1-x} \underset{1}{\sim} \frac{2^{\frac{\pi}{2}}}{1-x} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{2^{\frac{\pi}{2}}}{1-x} dx \text{ diverge, donc } \underline{I_g \text{ divergera.}}$$

$$\textcircled{h} \quad I_h = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \text{ diverge puisque } \int_0^1 \frac{dx}{x} \quad (\text{et } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x}) \text{ divergent}$$

On considère la fct f définie sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante.

On définit la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ par :

$$A_n = f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n)$$

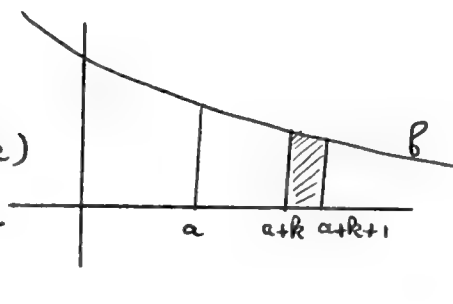
a) Mg. $A_n - f(a) \leq \int_a^{a+n} f(x) dx \leq A_{n-1}$

b) En déduire que la suite (A_n) est de m[^] nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (ie qu'elle convergessi l'intégrale converge)

c) Mg. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ convergessi $\alpha > 1$

a)

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k+1)}_{A_n - f(a)} \leq \int_a^{a+n} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k}^{a+k+1} f(x) dx \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k)}_{A_{n-1}}$$



b)

* Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, $A_n - f(a) \leq \int_a^{+\infty} f$ montre que A_n est majorée.
 (A_n) étant croissante, elle convergera.

* Si (A_n) converge, notons $\lim A_n = A$. Comme (A_n) est une suite à termes positifs, $A = \sup A_n$ et :

$$\forall n \quad \int_a^{a+n} f(x) dx \leq A_{n-1} \leq A$$

f étant positive, on aura aussi :

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \int_a^x f(x) dx \leq \int_a^{a+E(x-a)+1} f(x) dx \leq A$$

L'application $x \mapsto \int_a^x f(x) dx$ étant croissante, majorée par A , admettra une limite quand $x \rightarrow +\infty$. Ie $\int_a^{+\infty} f$ converge.

c) * Si $\alpha \geq 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante et les a) et b) s'appliquent :

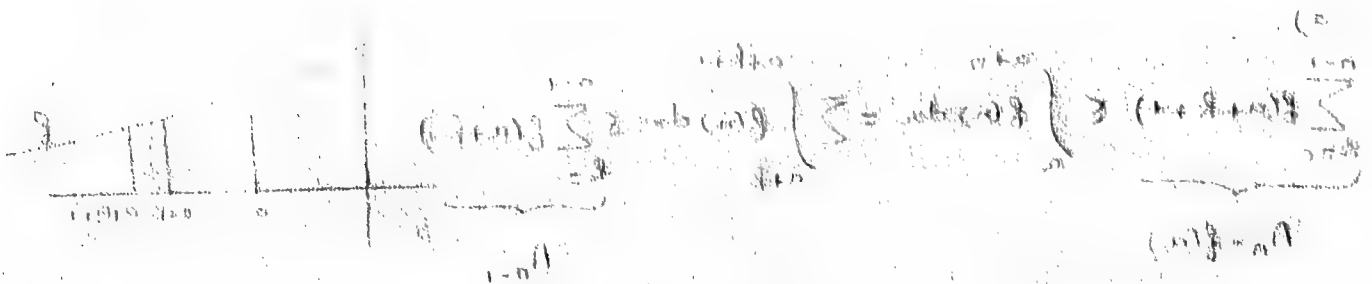
$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ sera de \hat{m} nature que $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$, ie convergera

ssi $\alpha > 1$.

* Si $\alpha < 0$, on ne peut plus appliquer a) et b), mais on peut conclure directement :

$$\alpha < 0 \Rightarrow k^\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} > 1$$

donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq n$, et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.



compte de la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, on a $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$. On peut alors écrire :

pour $n \geq 1$, $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$ et $f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. On a donc :

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \int_n^{n+1} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} dx$$

On peut alors sommer ces égalités pour n allant de 1 à N . On obtient :

$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) = \alpha \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction définie par

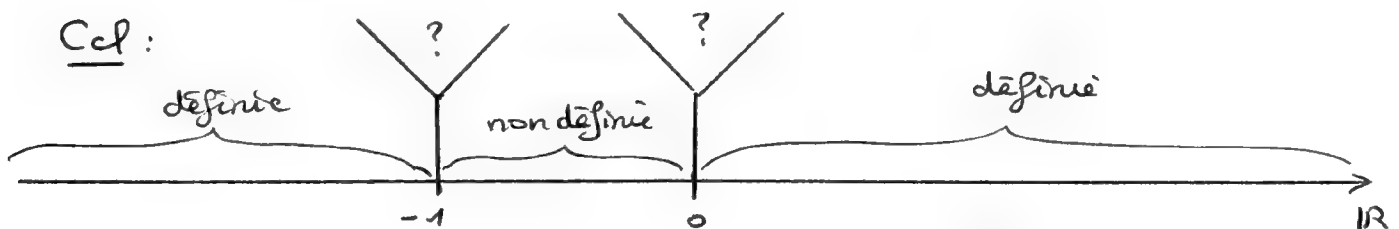
$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

• Si $x > 0$, aucun problème car $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Il faut avoir $1+t^3 > 0 \Leftrightarrow t^3 > -1 \Leftrightarrow t > -1$.

Supposons $x < 0$. f ne sera pas définie par une intégrale de Riemann ssi $\frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1 < x$

Ccl :



• En -1 et en 0, il faut voir si l'intégrale proposée n'est pas convergente. f serait alors définie par une intégrale généralisée.

* En -1 : $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge-t-elle ?

G oui, car $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+t} \sqrt{1-t+t^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{1+t}}$ et $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ converge puisque $\frac{1}{2} < 1$.

* En 0 : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ converge puisque $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\frac{3}{2} > 1$.

CPFD

Soient f et g deux fonctions d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et $b \in \bar{I}$.
On suppose que $f \sim_b g$ et que g garde un signe constant sur un voisinage de b .

Alas :

- 1) f garde un signe constant, le même que celui de g , sur un voisinage de b .

- 2) Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b[$,

alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \eta \quad |x - b| < \eta \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Si $g \text{ est } \geq 0$ au voisinage de b , on aura, quitte à prendre un η plus petit,

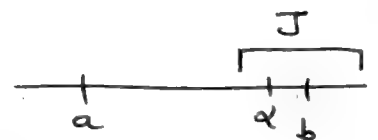
$$\forall \epsilon \exists \gamma \cdot |x-b| < \gamma \Rightarrow g(x) - \epsilon |g(x)| \leq f(x) \leq g(x) + \epsilon |g(x)|$$

$$g(x) \underbrace{(1 - \epsilon)}_{\text{positif si } \epsilon < 1} \leq f(x) \leq g(x) (1 + \epsilon)$$

d'ou 1).

Preuvons 2) : Fixons un intervalle J contenant b tel que f et g soient positives sur $I \cap J$, et $a \in I \cap J$. Alors

$\int_a^b f$ est de même nature que $\int_a^b g$



Ainsi, quitte à restreindre $[a, b[$, on peut supposer que β et g sont toutes deux positives sur $[a, b[$. Alors :

$$\forall \epsilon \exists \eta \mid |n-b| < \eta \Rightarrow g(n)(1-\epsilon) \leq f(n) \leq g(n)(1+\epsilon) \quad (*)$$

Soit c tel que $|c-b| < \gamma$. (*) entraîne :

$$(1-\epsilon) \int_c^A g(x) \leq \int_c^A f(x) \leq (1+\epsilon) \int_c^A g(x)$$

d'où que A vérifie $|A-b| < \eta$

D'où 2).

(En effet, on fixe ϵ tel que $1-\epsilon > 0$. Si $\int_c^b g$ converge, pour tout A
 $0 \leq \int_c^A f(x) \leq (1+\epsilon) \int_c^A g(x)$. La fct $A \mapsto \int_c^A f(x)$ est croissante
 (car $f \geq 0$) et majorée par $(1+\epsilon) \int_c^b g(x)$, donc converge dans \mathbb{R}
 d'après le th. de la limite monotone. L'inégalité
 $(1-\epsilon) \int_c^A g(x) \leq \int_c^A f(x)$ permet de prouver de la même façon que
 la convergence de $\int_c^A f$ entraîne celle de $\int_c^A g$)

On considère la fct réelle γ définie par :

$$\gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

a) Déterminer l'intervalle I de \mathbb{R} , ensemble de définition de la fonction γ .

b) Mg $\gamma(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$

c) Mg $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) En déduire un équivalent de $\gamma(x)$ au voisinage de $+\infty$, puis le développement limité de $\gamma(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.

a) Si $x > 0$, $e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t}\right)$ donc $\frac{e^{-xt}}{1+t} \sim o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale converge.

Si $x \leq 0$, $\int_0^A \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^A \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$. Comme $\frac{1}{1+t} \sim \frac{1}{t}$, l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t}$ diverge et il en sera de même de $\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

Ainsi $\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$

b) Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \left[\frac{1}{1+t} \cdot \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{e^{-xt}}{-x} dt \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

c) $0 \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt < \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ d'où le résultat.

d) D'après b), $\gamma(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} E(x)$ avec $E(x) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$ qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Cela prouve que $\gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.

* Par intégration par parties, on a aussi :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n} dt = \left[\frac{1}{(1+t)^n} \cdot \frac{e^{-xt}}{-n} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{n}{(1+t)^{n+1}} \cdot \frac{e^{-xt}}{-n} dt$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{n}{n} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Il suffit de remplacer dans la formule du b) pour obtenir :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^3} dt$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(ou le c)).

Étudier la nature des intégrales suivantes :

- 1) $\int_1^2 \frac{dt}{t^n - 1}$ 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)^2}$ 3) $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan } x}{x^2} dx$ 4) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx$
- 5) $\int_0^a x^\alpha \ln x dx$ $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. En déduire $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\alpha \ln(\sin x) dx$
- 6) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$ $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, a > 1$ (Intégrale de Bertrand)

1) $f(t) \doteq \frac{1}{t^n - 1} = \frac{1}{(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1)}$ donc $\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{f(t)}{\frac{1}{t-1}} = n$ et

$f(t) \sim \frac{n}{t-1}$. $\frac{1}{t-1}$ garde un signe constant au v. de $1+$, de sorte que

$I \doteq \int_1^2 \frac{dt}{t^n - 1}$ soit de même nature que $\int_1^2 \frac{n}{t-1} dt$, qui diverge.

2) $\frac{1}{x(1+x)^2} \sim \frac{1}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge. Il en sera de même de I .

3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan } x < \frac{\pi}{2}$ donc si $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{\text{Arctan } x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2}$.

La convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2} dx$ entraînera alors celle de I .

NB: on peut aussi remarquer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2}$, donc $\text{Arctan } x \sim \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\text{Arctan } x}{x^2} \sim \frac{\pi}{2x^2}$ (...)

4) L'intégrale I est absolument convergente car

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin^2 x| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

5) C'est une intégrale de Bertrand, problème en $x=0$.

* Ce qui est "évident" : Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x = 0$, $x \mapsto x^\alpha \ln x$ est prolongeable par continuité sur $[0, a]$ donc intégrable sur cet intervalle.

* Pour aller plus loin : On compare $f(x) \doteq x^\alpha \ln x$ à $\frac{1}{x^\delta}$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^\gamma f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\gamma+\alpha} \ln x = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma+\alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \gamma+\alpha < 0 \end{cases}$$

• Si $\gamma+\alpha > 0$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\gamma}$ pour x proche de 0_+ .

On a $\gamma > -\alpha$. Si $-\alpha < 1$, on pourra choisir γ tq $-\alpha < \gamma < 1$ de sorte que $\int_0^a \frac{1}{x^\gamma} dx$ converge. Dans ce cas $I \doteq \int_0^a x^\alpha \ln x dx$ convergera absolument.

• Si $\gamma+\alpha < 0$, $|f(x)| > \frac{1}{x^\gamma}$ pour x voisin de 0, et $f(x)$ reste négatif.

$\int_0^a \frac{1}{x^\gamma} dx$ diverge si $\gamma > 1$.

Choisissons donc γ tq $1 < \gamma < -\alpha$, ce qui est possible si $1 < -\alpha$, ie $-1 > \alpha$. Dans ce cas, I diverge.

$$\| \text{Conclusion : } I = \int_0^a x^\alpha \ln x dx \begin{cases} \text{converge si } \alpha > -1 \\ \text{diverge si } \alpha < -1 \end{cases}$$

• Si $\alpha = -1$, $I_\varepsilon = \int_\varepsilon^a \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_\varepsilon^a$

et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln^2 \varepsilon = +\infty$ prouve que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} I_\varepsilon = -\infty$, et que

I diverge.

Application : étude de $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \ln(\sin x) dx$

* 1^{ère} méthode : chgt de variable

$u = \sin x \quad x = \arcsin u \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$
 L'intégrale devient : $\int_0^1 u^\alpha \cdot \ln u \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ de même nature que $\int_0^1 u^\alpha \ln u du$

puisque $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1$.

On applique ce qui précède : l'intégrale converge si $\alpha > -1$. C.F.F.)

* 2^{ème} méthode : on cherche un équivalent de l'intégrant à l'aide des D.L.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\ln(\sin x) = \ln x + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)$$

$$\text{or } \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \text{ donc :}$$

$$\ln(\sin x) = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \Rightarrow \ln(\sin x) \sim \ln x \quad (1)$$

(NB : on aurait aussi pu utiliser le résultat suivant : "Si $f > 0, g > 0$ et $f \sim g$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, et s'il existe M tq $|\ln g(x)| \geq M > 0$ pour x voisin de x_0 , alors $\ln f \sim \ln g$ ".

Ici : $\sin x \sim x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\ln(\sin x) \sim \ln x$.)

$$\sin^\alpha x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^\alpha = x^\alpha \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^\alpha \sim x^\alpha \quad (2)$$

$$\text{puisque } (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$$

(1) et (2) entraînent $\sin^\alpha x \ln(\sin x) \sim x^\alpha \ln x$ et $\int_0^a x^\alpha \ln x dx$ a été étudiée précédemment.

C.F.F.)

6) Intégrale de Bertrand. Méthode analogue à celle du 5), ie comparaison à $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

(\square Intégration)

Règle d'Abel pour les intégrales généralisées : démonstration avec des hypothèses renforcées(*)

On rappelle le critère de Cauchy pour les intégrales :

"Soit h une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Alors $\int_a^b h(t) dt$ convergessi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a, b[\quad \forall \lambda, \mu \text{ tels que } c \leq \lambda \leq \mu < b \quad \left| \int_{\lambda}^{\mu} h(t) dt \right| < \varepsilon "$$

a) Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On suppose en outre que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.
Soit $g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, et telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall \lambda, \mu \in [a, +\infty[\quad \left| \int_{\lambda}^{\mu} g(t) dt \right| \leq A$$

Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) g(t) dt$ est convergente en utilisant le critère de Cauchy.

b) Application : étudier la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

a) Par intégration par parties

$$\int_{\lambda}^{\mu} f(t) g(t) dt = [f(t) G(t)]_{\lambda}^{\mu} - \int_{\lambda}^{\mu} f'(t) G(t) dt$$

où $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, donc :

$$\left| \int_{\lambda}^{\mu} f(t) g(t) dt \right| \leq f(\mu) |G(\mu)| + f(\lambda) |G(\lambda)| + \int_{\lambda}^{\mu} -f'(t) |G(t)| dt$$

puisque f est positive (car décroissante et tendant vers 0) et que $f'(t) \leq 0$ pour tout t (car f décroît)

(*) La preuve sous des hypothèses minimale se trouve en Ramis III.7.2.6

Par hypothèse $|G(x)| \leq A$ pour tout $x \in [a, +\infty[$, donc :

$$\left| \int_{\lambda}^{\mu} f(t) g(t) dt \right| \leq A (f(\mu) + f(\lambda)) - A \int_{\lambda}^{\mu} f'(t) dt \\ \leq 2A f(\lambda)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, il existe $c > a$ tel que $x > c \Rightarrow |f(x)| < \frac{\epsilon}{2A}$

et donc : $\forall \epsilon > 0 \exists c \quad c \leq \lambda < \mu \Rightarrow \left| \int_{\lambda}^{\mu} f(t) g(t) dt \right| \leq \epsilon$.
Le critère de Cauchy est vérifié.

$$b) \quad \left| \int_{\lambda}^{\mu} \sin t \, dt \right| \leq \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 2 \quad \text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$t \mapsto \sin t$ est continue.

$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ ne pose pas de pb en 0 car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ assure un

prolongement de $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ par continuité en 0. On discute alors

la convergence de $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est C^{∞} décroissante et tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui permet d'appliquer ^{sur $[1, +\infty[$} la règle d'Abel de a).

Cel : $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est convergente

2^e solution : par intég. p.p.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{t}} (-\cos t) \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} (-\cos t) dt$$

$$= \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt$$

intégrale absolument convergente car $\frac{3}{2} > 1$

a) Montrer les intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt$ et $I_2 = \int_1^\infty \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt$ sont convergentes

b) Calculer $I = I_1 + I_2$. On pourra utiliser le chgt de var. $u = \frac{1}{t}$

a) En 0 : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} = 0$ donc la fonction à intégrer se

prolonge par continuité sur tout $[0, 1]$, et I_1 converge.

En 1 : pas de pb, la fct y étant continue.

En $+\infty$:

$$\frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} \sim \frac{\ln t}{t^5} \quad \text{et} \quad \frac{\ln t}{t^5} = o\left(\frac{1}{t^4}\right).$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^4} dt$ converge, I_2 aussi.

$$b) \quad I_1 = \int_0^1 \frac{-\ln u}{u^3 \left(1 + \frac{1}{u^4}\right)^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = - \int_1^\infty \frac{u^3 \ln u}{(1+u^4)^2} du = -I_2$$

montre que $I = 0$.

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{8}$

$x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ est la décomposition en produit de poly. irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ de x^4+4 .

Décomposons $\frac{1}{x^4+4}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

\uparrow $1+i$ est racine du dénominateur \uparrow $-1-i$ est racine du dénominateur

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+i)^2+2(1+i)+2} = a(1+i)+b \\ \frac{1}{(1+i)^2-2(-1-i)+2} = c(-1-i)+d \end{cases}$$

On résout ce système facilement pour trouver :

$$\begin{aligned} f(x) \doteq \frac{1}{x^4+4} &= \frac{-\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2-2x+2} + \frac{\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}}{x^2+2x+2} \\ &= -\frac{1}{16} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{x^2-2x+2} + \frac{1}{16} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x) dx &= -\frac{1}{16} \left[\ln|x^2-2x+2| \right]_0^A + \frac{1}{16} \left[\ln|x^2+2x+2| \right]_0^A + \frac{1}{8} \int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+2} \\ &\quad + \frac{1}{8} \int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$

$$\int_0^A f(x) dx = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{A^2 + 2A + 2}{A^2 - 2A + 2} \right| + \frac{1}{8} \int_0^A \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} + \frac{1}{8} \int_0^A \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$$

$\rightarrow 0 \quad (A \rightarrow +\infty)$

Finalement :

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx &= \frac{1}{8} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[\text{Arc tan}(x-1) \right]_0^A + \left[\text{Arc tan}(x+1) \right]_0^A \right) \\ &= \frac{1}{8} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\text{Arc tan}(A-1) + \text{Arc tan}(A+1) \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R}_+ , admettant une dérivée première et une dérivée seconde continue, et on suppose que

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} [f''(x)]^2 dx \quad \text{convergent.}$$

En utilisant une intégration par parties et le critère de Cauchy pour les intégrales, montrer que $\int_0^{\infty} [f'(x)]^2 dx$ converge.

* Par intégration par parties, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_{\lambda}^{\mu} f'^2 = [f \cdot f']_{\lambda}^{\mu} - \int_{\lambda}^{\mu} f \cdot f'' \quad (1)$$

Rappel : Critère de Cauchy pour les intégrales.

$\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \lambda, \mu > A \Rightarrow \left| \int_{\lambda}^{\mu} f(x) dx \right| \leq \varepsilon$

Ce n'est qu'une version du Critère de Cauchy pour les fonctions !

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\left(\int_{\lambda}^{\mu} f f'' \right)^2 \leq \left(\int_{\lambda}^{\mu} f^2 \right) \left(\int_{\lambda}^{\mu} f''^2 \right) \quad (2)$$

et le second membre de (2) peut être rendu $\leq \varepsilon$ dès que λ, μ sont suffisamment grands puisque $\int_0^{\infty} f^2$ et $\int_0^{\infty} f''^2$ convergent, par hypothèse.

L'intégrale $\int_0^{\infty} f f''$ est donc convergente.

(1) s'écrit encore :

$$\int_0^y f'^2 = [f \cdot f']_0^y - \int_0^y f \cdot f'' \quad (1')$$

si bien que $\int_0^{\infty} f'^2$ sera convergente si l'on montre que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) \cdot f'(y)$ existe dans $\mathbb{R} \dots$

* Montrons que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)f'(y)$ existe dans \mathbb{R} .

$y \mapsto \int_0^y f'^2$ est une fct positive croissante donc converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou vers $+\infty$, quand $y \rightarrow +\infty$ (Th. de la limite monotone). L'égalité :

$$\int_0^y f'^2 = [ff']_0^y - \int_0^y ff'' \quad (1')$$

et la convergence de $\int_0^\infty f.f''$ montre que :

- soit $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y).f'(y) \in \mathbb{R}$

- soit $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y).f'(y) = +\infty$

Supposons par l'absurde que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)f'(y) = +\infty$.

Or $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y f(n)f'(n) dx = +\infty$ et $\int_0^y f(n)f'(n) dx = \frac{1}{2} (f^2(y) - f^2(0))$

montrant que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^2(y) = +\infty$, ce qui contredit la convergence

de $\int_0^\infty f'^2$.

CPFD

On considère la fonction $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition, et étudier les variations de f .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- Montrer que $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2 - f(x)$, et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$
- Quelle est la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$?

a) f est définie si $x > 0$ et si $\ln t \neq 0$ pour tout t entre x et x^2 .
C'est assuréssi $x \neq 1$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

b) $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ donc f sera dérivable sur cet ensemble et $f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$

Le tableau de variations de f s'en déduit :

x	0	1
f'		+
f		→

c) Si $0 < x < A < 1$, $|f(x)| \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{|\ln t|} \leq (x - x^2) \cdot \frac{1}{|\ln A|}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

2^e solution : Si H désigne une primitive de $f(t) = \frac{1}{\ln t}$ sur $]0, 1[$, on a par le Th. AF :

$$|f(x)| = |H(x^2) - H(x)| \leq \sup_{t \in]x^2, x[} |f(t)| (x^2 - x) = \frac{x - x^2}{|\ln x|} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0^+)$$

$$d) \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} - \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

$$= [\ln |\ln t|]_x^{x^2} - \beta(x)$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1-t}{t \ln t} dt = \ln 2 - \beta(x)$$

Comme $t \mapsto \frac{1-t}{t \ln t}$ peut être prolongée en une fct continue g sur un voisinage de 1 (car $\ln t \sim t-1$ entraîne $\frac{1-t}{t \ln t} \sim -\frac{1}{t}$ donc $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{t \ln t} = -1$), on peut écrire :

$$\int_x^{x^2} g(t) dt = \ln 2 - \beta(x) \quad (*)$$

pour x voisin de 1.

g étant continue sur $]0, +\infty[$, l'application $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ sera continue sur $]0, +\infty[$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \int_a^x g(t) dt = \int_a^1 g(t) dt$,

$$\text{et donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} g = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\int_a^{x^2} g - \int_a^x g \right) = 0$$

En passant à la limite pour x tendant vers 1 dans (*), on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \beta(x) = \ln 2}$$

e) Soient $0 < \varepsilon < A < 1$.

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{x-1}{\ln x} dx = \int_{\varepsilon}^A \beta'(x) dx = \beta(A) - \beta(\varepsilon)$$

Comme $\lim_{A \rightarrow 1} \beta(A) = \ln 2$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \beta(\varepsilon) = 0$, on déduit que

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx \text{ converge et que } \boxed{\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2}$$

Si n est un réel, démontrer que $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ converge si $n > 0$

Il s'agit d'une intégrale d'une fonction positive.

* La convergence pour $x \rightarrow +\infty$ ne pose pas de problème car

$$x^{n-1} e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

$$\text{En effet } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+1} e^{-x} = 0$$

Il suffit alors de constater que $x^{n-1} e^{-x}$ reste positive si $n > 0$ et que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

* En 0, on a $x^{n-1} e^{-x} \sim x^{n-1}$ et l'on sait que $\int_0^1 x^{n-1} dx$ converge si $1-n < 1$, ie $n > 0$.

Finalement $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ converge si $n > 0$.